

# Вычисление диаметра в задаче сортировки однохромосомных геномов транспозициями

Студент 5 курса СПбАУ Илья Минкин  
Руководитель Макс Алексеев

# Геномные перестройки

- В ходе эволюции геном изменяется
- Геном может изменяться по-разному
- Незначительные изменения — точечные мутации, вставки/удаления небольших фрагментов
- Крупные изменения — геномные перестройки, которые меняют расположение значительных участков хромосомы
- В результате геномных перестроек хромосомы некоторых организмов выглядят как разные перестановки одинаковых блоков

# Геномные перестройки

- Существует несколько операций над геномом, которые относят к перестройкам
- Reversal — изменяется порядок следования некоторых «блоков», из которой составлена хромосома
- Transposition — меняются местами два соседних участка хромосомы
- Transereversal — комбинация reversal и transposition
- Задача — восстановить сценарий, по которому происходила эволюция организмов

# Сортировка транспозициями

- Заданы два генома  $A$  и  $B$ , каждый из которых состоит из 1 хромосомы
- Предполагается, что хромосомы обоих геномов представляют собой наборы одних и тех же уникальных блоков, но расположенных в разном порядке
- Требуется найти кратчайшую последовательность транспозиций, превращающую один геном в другой

# Сортировка транспозициями

- Заданы два генома  $A$  и  $B$ , каждый из которых состоит из 1 хромосомы
- Предполагается, что хромосомы обоих геномов представляют собой наборы одних и тех же уникальных блоков, но расположенных в разном порядке
- Требуется найти кратчайшую последовательность транспозиций, превращающую один геном в другой

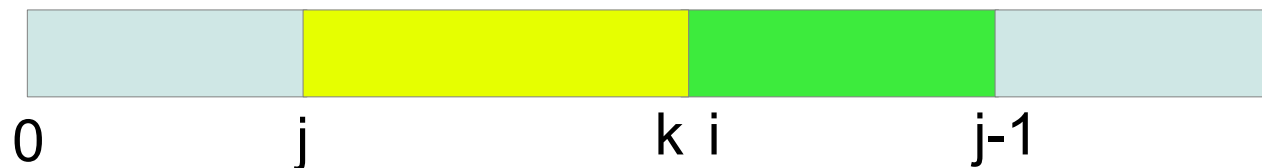
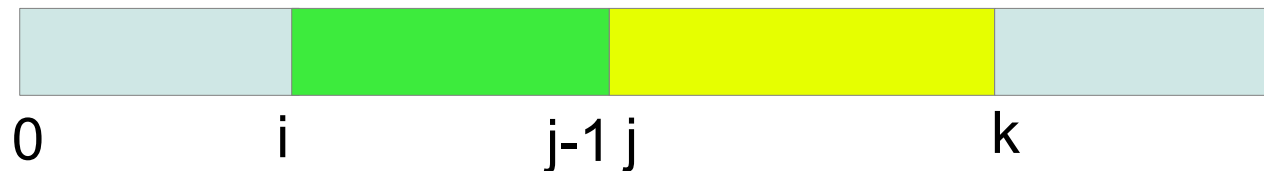
# Формальная постановка задачи

- Пусть порядок генов на хромосоме представлен в виде числовой перестановки

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n, \quad \pi_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \pi \in S_n,$$

Где  $S_n$  это множество всех перестановок длины  $n$

- Транспозиция  $\rho_{ijk}$ ,  $1 \leq i < j \leq k \leq n$  меняет местами 2 соседних фрагмента перестановки  $\pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1}$  и  $\pi_j \pi_{j+1} \dots \pi_k$



- Транспозиционный граф это  $G=(V, E), V=S_n$   
 $E=\{\pi\sigma \mid \exists i < j \leq k, \pi \cdot \rho_{ijk} = \sigma\}$
- Транспозиционным расстоянием  $d_T(\pi, \sigma)$  между парой перестановок  $\pi$  и  $\sigma$  называется расстояние между ними в графе  $G$
- Можно показать, что  

$$d_T(\pi, \sigma) = d_T(id, \pi\sigma^{-1}) = d_T(id, \sigma\pi^{-1}),$$
где  $id = 1\ 2 \dots n$  — тождественная перестановка
- Транспозиционным диаметром  $TD(n)$  называется диаметр графа  $G$   

$$TD(n) = \max\{d_T(id, \pi) \mid \pi \in S_n\}.$$

- Задача сортировки транспозициями — для данной числовой перестановки  $\pi$  найти кратчайшую последовательность транспозиций, которая переводит  $\pi$  в  $id$
- Содержательный пример - Пусть требуется отсортировать перестановку «2 1 5 4 3»

2 1 5 4 3	→	2 1 4 3 5
2 1 4 3 5	→	2 1 3 4 5
2 1 3 4 5	→	1 2 3 4 5



# История вопроса

- В 1996 году был опубликован 1.5 приближенный алгоритм для задачи сортировки транспозициями [Vafna, Pevzner, 1996]
- Они также посчитали  $TD(n)$  для  $n \leq 10$  и предположили, что  $TD(n) = \lceil (n + 1)/2 \rceil$  для всех  $n$
- Были доказаны оценки  $\left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil \leq TD(n) \leq \left\lfloor \frac{2n - 2}{3} \right\rfloor$
- Высказано предположение, что перестановка  $rev = n \ n - 1 \ n - 2 \ \dots \ 2 \ 1$  всегда будет принадлежать к числу самых удаленных

- В 2001 году было опровергнуто предположение о точном значении  $TD(n)$  и самой удаленной перестановке *rev*

[H. Eriksson et al., 2006]

- $TD(13) = 8$ , что на 1 больше, чем  $\lceil (13 + 1)/2 \rceil = 7$
- Перестановка «4 3 2 1 5 13 12 11 10 9 8 7 6» требует 8 транспозиций для сортировки и является более удаленной, чем *rev*
- Они также доказали новые оценки и вычислили точные значения  $TD(n)$ ,  $n \leq 15$

$$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \leq TD(n) \leq \left\lfloor \frac{2n-2}{3} \right\rfloor$$

- В 2006 году был опубликован 1.375 приближенный алгоритм с временем работы  $O(n^2)$   
[I. Elias and T. Hartman., 2006]
- Они также улучшили нижнюю оценку показав, что при  $n \leq 14$

$$TD(n) \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$$

- Наконец, в 2011 году было доказано, что сортировка транспозициями это  $NP$ -полная задача  
[L. Bulteau, G. Fertin, I. Rusu., 2011]

# Точные значения транспозиционного диаметра

[H. Eriksson et al., 2006], <http://oeis.org/A065603>

$n$	$TD(n)$	$n$	$TD(n)$
1	0	9	5
2	1	10	6
3	2	11	6
4	3	12	7
5	3	13	8
6	4	14	8
7	4	15	9
8	5	16	9 или 10?

# Цель работы

- Попытаться вычислить точные значения  $TD(n)$  для как можно большего числа  $n$
- Попробовать построить общий вид наиболее удаленных перестановок (относительно транспозиционного расстояния)

# С чего можно начать

- Пусть перестановка длины  $n$ , требующая максимально возможное число транспозиций для сортировки, называется  $d_{max}(n)$
- Можно найти все такие перестановки для  $n \leq 10$  при помощи обычного обхода в ширину
- Ничего нового мы не вычислим, но можно будет посмотреть, как выглядят  $d_{max}(n)$

# Результаты

$n$	Диаметр	Количество перестановок	Доля наиболее удаленных перестановок
1	1	1	100%
2	1	1	50%
3	2	1	16.7%
4	3	1	4.2%
5	3	31	25.8%
6	4	45	6.3%
7	4	1513	30.0%
8	5	2836	7.0%
9	5	114327	31.5%
10	6	255053	7.0%
11	6	12537954	31.4%

# Анализ

- Результаты совпадают с ранее опубликованными, см. <http://oeis.org/A164366>
- Чтобы проанализировать структуру самых удаленных перестановок для разных  $n$ , можно воспользоваться диаграммами циклов, которые ввели в своей работе Vafna и Pevzner

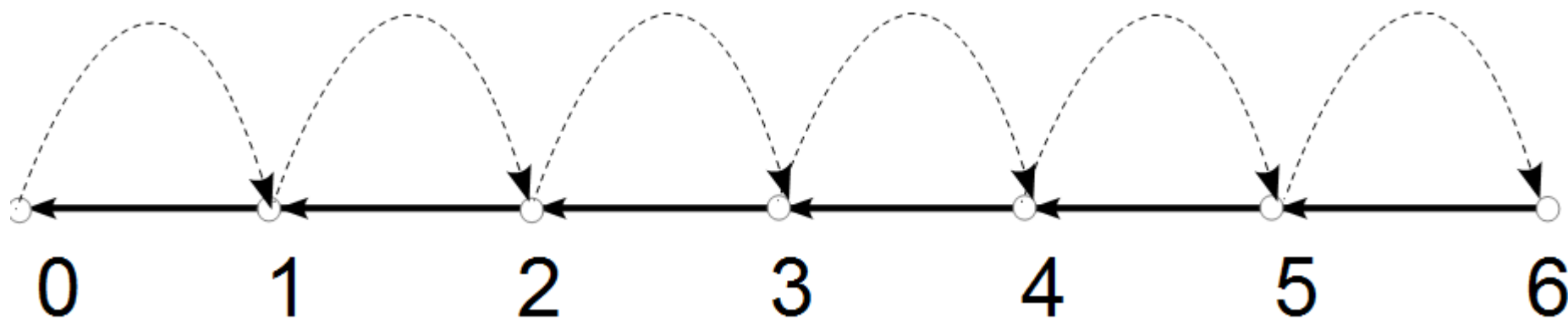


# Cycle graph

- К перестановке длины  $n$  приписывается  $0$  в начало, в конец дописывается  $n + 1$
- Каждое число в перестановке это вершина графа
- Два типа ребер:
  1. «Черные» - ориентированное ребро ведет из  $\pi_i$  в  $\pi_{i-1}$
  2. «Серые» - ориентированное ребро ведет из  $\pi_i$  в  $\pi_i + 1$
- Такой граф однозначным образом разбивается на циклы, в котором чередуются ребра разных цветов

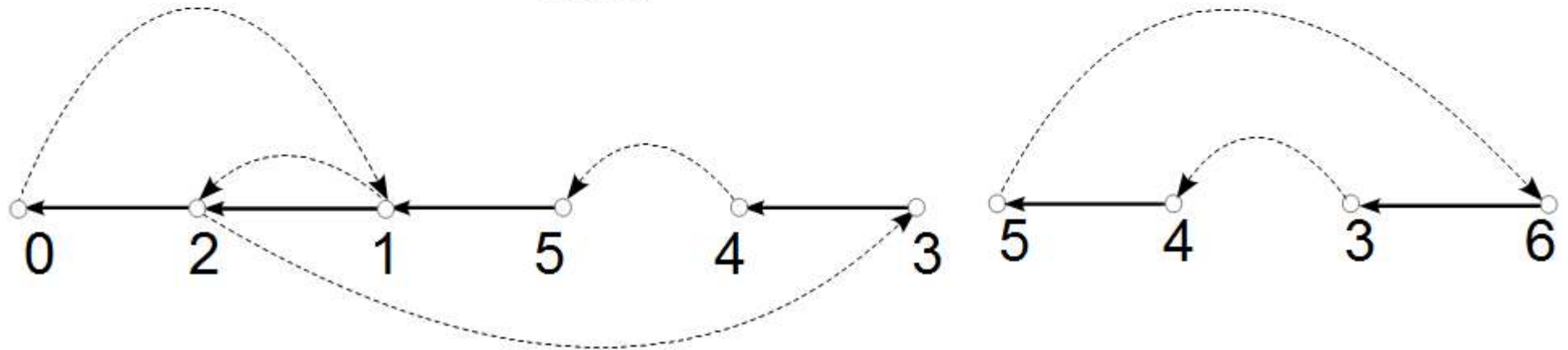
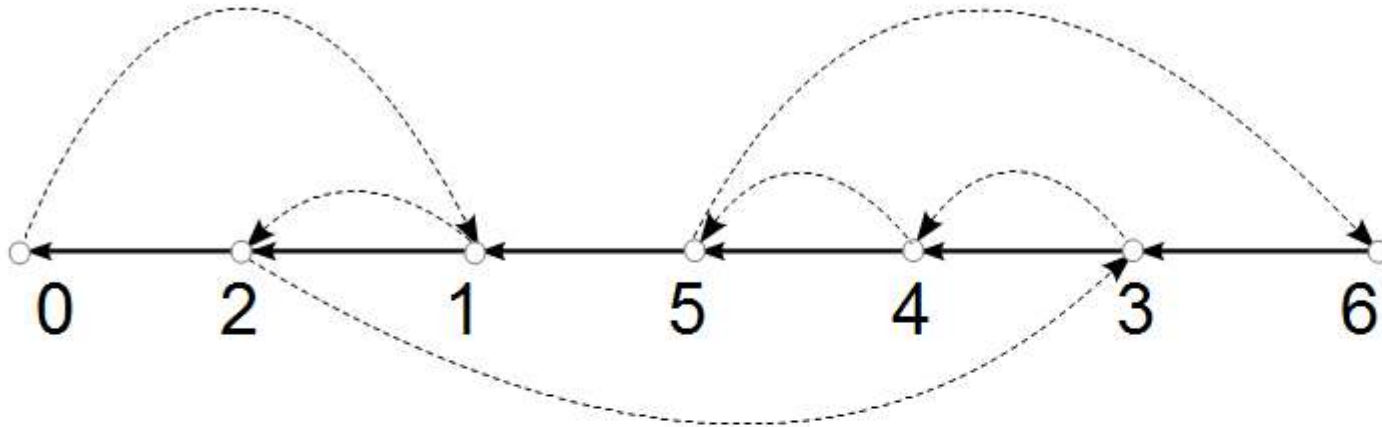
# Содержательный пример №1

$$\pi = id$$



# Содержательный пример №2

$\pi = \langle 2 \ 1 \ 5 \ 4 \ 3 \rangle$



# Что с этим делать

- Количество циклов на cycle graph перестановки влияет на ее транспозиционное расстояние
- Самых удаленных перестановок для  $n \leq 11$  очень много
- Попробуем собрать некоторую «статистику» для самых удаленных перестановок, а именно, из циклов какого размера они состоят

# Паттерны

- Пусть диаграмма циклов перестановки  $\pi$  разбивается на  $k$  циклов, а количество ребер в  $i$ -м цикле это  $sc(i)$
- Запишем числа  $sc(i)$  в порядке неубывания, получившаяся строка это **паттерн**
- Пример — перестановка «2 1 5 4 3» разбивается на циклы «0 1 2 3 4 5 1 2 0» и «3 4 5 6 3»
- Тогда паттерн перестановки «2 1 5 4 3» это «4 8»
- Какие бывают паттерны и сколько им соответствует наиболее удаленных перестановок для разных  $n$ ?

$$n = 5, 6, 7$$

$n$	Паттерн	Количество наиболее удаленных перестановок, подходящих под паттерн	Количество всех перестановок, подходящих под паттерн
5	2 10	6	48
	6 6	1	12
	4 8	24	24
6	14	45	180
7	2 14	360	1440
	6 10	136	608
	4 12	720	720
	8 8	276	276
	4 4 4 4	21	21

$$n = 8, 9$$

$n$	Паттерн	Количество наиболее удаленных перестановок, подходящих под паттерн	Количество всех перестановок, подходящих под паттерн
8	4 4 10	63	1728
	18	2773	8064
9	2 4 4 10	630	17280
	2 18	27730	80640
	4 4 6 6	175	4440
	6 14	10470	31680
	10 10	4402	13248
	4 16	40320	40320
	8 12	27360	27360
	4 4 4 8	3240	3240

$$n = 11$$

$n$	Паттерн	Количество наиболее удаленных перестановок, подходящих под паттерн	Количество всех перестановок, подходящих под паттерн
11	2 6 8 8	132	831600
	2 4 8 10	39600	1957824
	2 4 4 14	71940	1378080
	2 22	2948964	7257600
	6 6 6 6	21	38720
	4 6 6 8	11832	506880
	4 4 6 10	42612	598752
	6 18	1096368	2741760
	10 14	850860	2108160
	4 20	3628800	3628800
	8 16	2298240	2298240
	4 4 4 12	245520	245520
	12 12	1022400	1022400
	4 4 8 8	279180	279180
4 4 4 4 4 4	1485	1485	



$$n = 13$$

$n$	Паттерн	Количество наиболее удаленных перестановок, подходящих под паттерн	Количество всех перестановок, подходящих под паттерн
13	10 18	238	258435072
	14 14	189	118644480

- При  $n = 13$  красивая закономерность уже не работает
- Можно скорректировать гипотезу и предположить, что для «определяющих паттернов» сохраняется транспозиционное расстояние  $\lceil (n + 1)/2 \rceil$

# Результаты

- Сделано предположение, что существует класс перестановок, для которых сохраняется транспозиционное расстояние  $\lceil (n + 1)/2 \rceil$  для всех нечетных  $n$ , и этот класс можно легко описать
- Можно добавить новые значения в OEIS

## Ссылки на источники

1. L. Bulteau, G. Fertin, I. Rusu. Sorting by Transpositions Is Difficult. ICALP (1) 2011: 654–665.
2. V. Bafna and P. A. Pevzner. Sorting by transpositions. SIAM J. Discrete Math., 11(2):224–240, 1998.
3. I. Elias and T. Hartman. A 1.375-approximation algorithm for sorting by transpositions, IEEE/ACM Trans. Comput. Biol. Bioinform., 3 (2006), pp. 369–379.
4. L. Lu, Y. Yang. A lower bound on the transposition diameter. SIAM J. Discrete Math., 24(4):1242–1249, 2010.
5. H. Eriksson, K. Eriksson, J. Karlander, L. Svensson, and J. Wastlund. Sorting a bridge hand. Discrete Math., 241(1-3):289–300, 2001.
6. Последовательность OEIS A164366. <http://oeis.org/A164366>
7. R. de A. Hausen et al. On the Toric Graph as a Tool to Handle the Problem of Sorting by Transpositions. BSB '08 Proceedings of the 3rd Brazilian symposium on Bioinformatics: Advances in Bioinformatics and Computational Biology, 79 – 91, 2008